Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение гимназия №56 г. Томска

Утверждаю
директор МАОУ гимназии №56
_____________ И.И. Буримова
приказ № 98 от 31.08 2021

Рабочая дополнительная образовательная
общеразвивающая программа курса «За станицами учебника математики»

Для обучающихся: 10-11 классов
Срок реализации: 2 года

Составил(и): учителя математики
МАОУ гимназии №56

Томск – 2021

Пояснительная записка

Рабочая дополнительная образовательная общеразвивающая программа курса **«За страницами учебника математики»** составлена в соответствии со следующими нормативно-правовыми инструктивно-методическими документами:

1. Федеральный закон РФ от 29 декабря 2012 г. № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» (с дополнениями и изменениями)
2. Концепция развития дополнительного образования детей, утвержденная распоряжением Правительства РФ № 1726-р от 4 сентября 2014 г.
3. Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по дополнительным общеобразовательным программам, утвержденный приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 22.03.2021 № 115 (далее – Порядок).
4. Санитарные правила СП 2.4.3648-20 «Санитарно-эпидемиологические требования к организациям воспитания и обучения, отдыха и оздоровления детей и молодежи» утвержденными Постановлением Главного государственного санитарного врача РФ от 28.09.2020 № 28 (с дополнениями и изменениями) (далее – СанПиН).
5. Стратегия развития воспитания в Российской Федерации на период до 2025 года, утвержденной распоряжением Правительства Российской Федерации от 29 мая 2015 г. N 996-р.
6. Рекомендации по оснащению образовательного учреждения учебным и учебно-лабораторным оборудованием (приложение к письму Министерства Образования и науки РФ от 24.11.2011 № МД-1552/03).
7. Стратегия развития воспитания в Российской Федерации на период до 2025 года. (утв. Распоряжением Правительства Российской Федерации от 29 мая 2015 г. N 996-р)
8. Концепция программы поддержки детского и юношеского чтения в Российской Федерации
9. Концепция развития физико-математического образования в Российской Федерации
10. Основная образовательная программа среднего общего образования МАОУ гимназии №56
11. Устав МАОУ гимназии №56

Направленность программы – техническая .
Изучение данного курса позволит школьникам научиться анализировать ситуации, планировать свою деятельность, осуществлять самоконтроль, работать с учебной и научной литературой, систематизировать знания по теме, решать и составлять задачи. Кроме того, изучение курса позволит выполнить такое творческое задание, которое они могут (в разных вариантах) применить в тех областях, которые их интересуют (а не только в математике). Это будет способствовать изменению отношения к математике, улучшению качества математической подготовки учащихся.

Актуальность программы.

В последние годы задачи с параметрами постоянно встречаются не только на вступительных экзаменах в ВУЗах, но и в контрольных работах в школе. Практика же выпускных и вступительных экзаменов по математике в форме ЕГЭ показывает, что задачи с параметрами представляют и для учащихся, и для абитуриентов наибольшую сложность, как в логическом, так и в техническом плане и поэтому умение их решать во многом предопределяет успешную сдачу этих экзаменов.

Задачи с параметрами позволяют получить достаточно достоверную информацию об уровне развития логического мышления учащихся; о сформированности умений решать новые задачи, проводить исследования; о математической культуре будущих студентов. Данные задачи являются прообразами тех научно – исследовательских заданий, которыми предстоит заниматься будущим студентам на разных этапах профессиональной подготовки. Теоретическое изучение и математическое моделирование процессов в различных областях человеческой деятельности часто приводит к сложным задачам, в которых «много» различных неизвестных, которые по существу и представляют собой параметры.

Однако в учебниках алгебры крайне мало задач, содержащих параметры, а эти задачи стали вызывать повышенный интерес не только у сильных учащихся, но и увлекать тех ребят, которые достаточно хорошо владеют школьной программой. Школьная же программа не предусматривает выработки прочных навыков решения задач, содержащих параметры, всеми учащимися, и поэтому более глубокое изучение возможно только на дополнительных занятиях. Тем более, что специфика задач с параметрами заключается в частном изобилии возможных вариантов и подвариантов, на которые распадаются основной ход решения в особых, допустимых и недопустимых значений параметра, в необходимости иногда выполнять большой объем работы по "собиранию" и систематизации ответа. И очень часто нельзя дать универсальных указаний по решению таких задач.

Отсюда становится понятной актуальность в разработке и проведении курса для старшеклассников по теме: «Задачи с параметрами».

Адресат программы – обучающиеся 10-11 класса.

Возраст детей участвующих в реализации данной программы 16-18 лет. В группе занимаются от 13 до 30 человек.

Цель курса:

- сформировать у учащихся качества креативности, способности к самостоятельному и инициативному решению проблем; выявлению, анализу и преодолению своих затруднений в учебной деятельности;
- сформировать элементы математической культуры по отношению к знаниям, умениям и опыту решения и составления задач с параметром;
- повысить логическое мышление учащихся.

Задачи курса:

- обучить учащихся методам составления задач, которые не зависят от предметной области;
- сформировать умения решать задачи с параметром, выполнять проверку решения, выполненную другими;
- подготовить к заключительной аттестации за курс средней школы, к централизованному тестированию и к вступительным экзаменам в ВУЗы.

В предлагаемом курсе каждый из методов решения задач с параметром сопровождается большим количеством примеров и исследовательских задач. Кроме того, разбираются различные иллюстрации задач с параметром, которые предлагались в ЕГЭ и на вступительных экзаменах в разные ВУЗы страны.

Организационно-педагогические условия реализации программы.

Срок реализации дополнительной образовательной программы рассчитан на 2 год обучения.

Количество часов в неделю -2, всего 136 учебных часа по 40 минут.

***Кадровые условия*.**

Педагогические работники, имеющие высшее профессиональное образование или среднее профессиональное образование по направлению подготовки «Образование и педагогика» или в области, соответствующей преподаваемому предмету

Основными формами ***психолого-педагогического сопровождения*** выступают:
диагностика;
консультирование педагогов и родителей, которое осуществляется педагогом и психологом
просвещение, коррекционная работа, осуществляемая в течение всего учебного времени.

Промежуточная аттестация для отслеживания результативности образовательной деятельности по программе проводится в форме тестирования.

1.Планируемые результаты освоения курса

Личностные, метапредметные и предметные результаты освоения учебного курса.

В основе реализации программы лежит системно - деятельностный подход, который предполагает:

- воспитание и развитие качеств личности, отвечающих требованиям информационного общества, инновационной экономики, задачам построения российского гражданского общества на основе принципов толерантности, диалога культур и уважения его многонационального, поликультурного.
- переход к стратегии социального проектирования и конструирования на основе разработки содержания и технологий образования, определяющих пути и способы достижения социально желаемого уровня (результата) личностного и познавательного развития занимающегося;
- развитие личности обучающегося на основе освоения универсальных учебных действий, познания и освоения мира;
- признание способов организации образовательной деятельности и учебного сотрудничества в достижении целей личностного и социального развития занимающихся;
- учёт индивидуальных возрастных, психологических и физиологических особенностей занимающихся;

Метапредметные связи программы.

- овладение способностью принимать и сохранять цели и задачи учебной деятельности, поиска средств её осуществления;
- освоение способов решения проблем творческого и поискового характера;
- формирование умения планировать, контролировать и оценивать учебные действия в соответствии с поставленной задачей и условиями её реализации; определять наиболее эффективные способы достижения результата;
- формирование умения понимать причины успеха/неуспеха учебной деятельности и способности конструктивно действовать даже в ситуациях неуспеха;
- освоение начальных форм познавательной и личностной рефлексии;
- овладение логическими действиями сравнения, анализа, синтеза, обобщения, классификации по признакам, установления аналогий и причинно-следственных связей, построения рассуждений, отнесения к известным понятиям;
- готовность слушать собеседника и вести диалог; готовность признавать возможность существования различных точек зрения и права каждого иметь свою; излагать своё мнение и аргументировать свою точку зрения и оценку событий;
- определение общей цели и путей её достижения; умение договариваться о распределении функций и ролей в совместной деятельности; осуществлять взаимный контроль в совместной деятельности, адекватно оценивать собственное поведение и поведение окружающих;
- овладение начальными сведениями о сущности и особенностях объектов, процессов и явлений действительности (природных, социальных, культурных, технических и др.) в соответствии с содержанием предмета;
- овладение базовыми предметными и межпредметными понятиями, отражающими существенные связи и отношения между объектами и процессами.

Планируемые результаты освоения программы

В результате изучения данного курса обучающиеся получат возможность формирования **личностных результатов:**

- **Определять** и **высказывать** под руководством учителя самые простые и общие для всех людей правила поведения при сотрудничестве (этические нормы);
- В предложенных педагогом ситуациях общения и сотрудничества, опираясь на общие для всех простые правила поведения, **делать выбор,** при поддержке других участников группы и педагога, как поступить.

Метапредметными результатами программы деятельности - является формирование следующих универсальных учебных действий (УУД):

Регулятивные УУД:

- **Определять** и **формулировать** цель деятельности на занятиях с помощью учителя.
- **Проговаривать** последовательность действий на занятии.
- Учить **высказывать** своё предположение (версию), учить **работать** по предложенному учителем плану.
- Средством формирования этих действий служит технология проблемного диалога на этапе изучения нового материала.
- Учиться совместно с учителем и другими учениками **давать** эмоциональную **оценку** деятельности класса на занятиях.
- Средством формирования этих действий служит технология оценивания образовательных достижений (учебных успехов).

Познавательные УУД:

- Добывать новые знания: **находить ответы** на вопросы, используя предлагаемый материал, свой жизненный опыт и информацию, полученную на уроке.
- Перерабатывать полученную информацию: **делать** выводы в результате совместной работы всего класса.
- Преобразовывать информацию из одной формы в другую: составлять рассказы на основе простейших моделей (предметных, рисунков, схематических рисунков, схем); находить и формулировать решение задачи с помощью простейших моделей (предметных, рисунков, схематических рисунков).

Коммуникативные УУД:

- Умение донести свою позицию до других: оформлять свою мысль в устной и письменной речи (на уровне одного предложения или небольшого текста).
- **Слушать** и **понимать** речь других.
- Средством формирования этих действий служит технология проблемного диалога (побуждающий и подводящий диалог).
- Совместно договариваться о правилах общения и поведения в школе и следовать им.
- Учиться выполнять различные роли в группе (лидера, исполнителя, критика).
- Средством формирования этих действий служит организация работы в парах и малых группах.
- Привлечение родителей к совместной деятельности .

В результате изучений курса учащиеся должны уметь:

- четко и последовательно сохранять равносильность решаемых уравнений и неравенств с параметром с учетом области определения выражений;
- учитывать выполнимость всех производимых операций;
- применять стандартные задачи с квадратным трехчленом (расположение точек относительно корней) к решению более сложных параметрических задач;
- производить отбор (параметрический) решений совокупностей и/или систем линейных, квадратных, показательных, логарифмических, тригонометрических уравнений, сводя их к простейшим;

- использовать стандартные свойства элементарных функций и их графиков при решении задач с параметром, содержащих элементы математического анализа;
- осознавать, распознавать и создавать собственные алгоритмы решения параметрических задач.

Основными результатами освоения учащимися содержания данного курса является определенный набор умений и навыков по темам практических занятий. Проверка достижения результатов обучения осуществляется путём проведения контрольной работы или контрольного тестирования по каждой теме. Так же предусмотрено проведение домашних контрольных работ, творческих и исследовательских работ по выбору. Данные работы не только обеспечивают накопление оценок для итоговой аттестации, но и позволяют учителю проследить динамику освоения учениками знаний и умений, своевременно скорректировать учебный процесс (изменить темп, стиль проведения занятий, уровень трудности индивидуальных заданий). Результаты выполнения текущих контрольных работ оцениваются по традиционной пятибалльной системе. Итоговая аттестация учащихся осуществляется на основе накопленных оценок за каждую тему.

Тематическое планирование

№ урока	*Тема урока*	*Кол-во часов*	*Вид занятия*	*Дата*
	10 класс. I Полугодие – 32 часа			
	Текстовые задачи. Теория многочленов.	***16ч***		
1-2	Задачи на проценты, смеси и сплавы.	2	*практикум*	
3-4	Задачи на движение по прямой.	2	*практикум*	
5-6	Задачи на движение по окружности.	2	*отработка навыков и умений*	
7-8	Задачи на движение по воде.	2	*отработка навыков и умений*	
9-10	Задачи на движение на совместную работу	2	*лекция*	
11-12	Теория многочленов. Теорема Безу.	2		
13-14	Применение теоремы Безу при решении уравнений и неравенств в заданиях ЕГЭ.	2		
15-16	Резерв	2		
Геометрия. Планиметрия.		***16ч***		
17-18	Решение прямоугольного и равнобедренного треугольников. Треугольники общего вида. Теоремы о медиане, биссектрисе треугольника. Формулы площади треугольника.	2	*лекция*	
19-20	Параллелограммы и трапеции. Четырехугольники.	2	*отработка навыков и умений*	
21-22	Центральные и вписанные углы. Касательные, хорда, секущая. Теорема об углах между касательной и хордой. Две теоремы об отрезках, связанных с окружностью. Углы с вершинами внутри и вне круга.	1	*отработка навыков и умений*	
	Две теоремы об отрезках, связанных с окружностью. Углы с вершинами внутри и вне круга.	1		
23-24	Вписанные и описанные окружности.	1	*практикум*	
	Вписанный и описанный четырехугольник.	1		

25-26	Многоугольники и их свойства. Решение задач блока «С».	2	*самостоят. работа*	
27-28	Окружности и системы окружностей. Решение задач блока «С».	2	*Семинар*	
29-30	Окружности и треугольники. Решение задач блока «С».	2		
31-32	Окружности и многоугольники. Решение задач блока «С».	2		
II Полугодие – 36 часов				
Линейные уравнения и неравенства с параметром.		***8ч***		
33-34	Знакомство с параметром	1	*Семинар*	
	Линейное уравнение с одной переменной, содержащее параметр.	1		
35-36	Линейные неравенства с параметром..	2		
37-38	Количество корней уравнений с параметром.	2		
39-40	Параметр в системах линейных уравнений и неравенств.	2		
	Квадратные уравнения и неравенства с параметром	***12ч***		
41-42	Квадратичная функция в задачах с параметром.	2		
43-44	Количество корней квадратных уравнений с параметром.	2		
45-46	Расположение корней квадратичной функции относительно заданных точек.	2		
47-48	Параметр в квадратичных уравнениях и неравенствах.	2		
49-50	«Ботаника» квадратного трехчлена.	2		
51-52	Решение задач или резерв.	2		
Финансовая математика		***16ч***		
53-54	Проценты, доли и соотношения. Просты и сложные проценты.	2	*лекция*	
55-56	Кредиты.	2	*лекция*	
57-58	Вклады.	2	*практикум*	
59-60	Производственные и бытовые задачи.	2	*уроки-практикумы*	
61-62	Задачи на нахождение экстремума.	2	*самост. работа*	
63-64	Решение задач блока «С».	2		
65-68	Резерв	4		
11 класс. ***I Полугодие – 32 часа***				
	Тригонометрия.	***16ч***		
1-2	Вычисление значений тригонометрических выражений	2		
3-4	Преобразований числовых тригонометрических выражений.	1		
	Преобразований буквенных тригонометрических выражений.	1		
5-6	Решение тригонометрических уравнений блока «С» ЕГЭ. Метод разложения на множители.	2		
7-8	Решение тригонометрических уравнений блока «С» ЕГЭ. Метод введения новой переменной и использование основных формул тригонометрии.	2		
9-10	Решение тригонометрических уравнений блока «С» ЕГЭ. Метод исследования корней уравнения на ОДЗ.	2		
11-12	Решение уравнений смешанного типа блока «С» ЕГЭ.	2		
13-14	Решение уравнений блока «С».	2		

15-16	Резерв	2		
	Неравенства	***16ч***		
17-18	Рациональные неравенства. Обобщенный метод интервалов.	2		
19-20	Показательные неравенства.	2		
21-22	Логарифмические неравенства.	2		
23-24	Неравенства с логарифмами по переменному основанию.	2		
25-26	Метод рационализации при решении показательных и логарифмических неравенств.	2		
27-30	Решение неравенств блока «С» ЕГЭ	4		
31-32	Резерв.	2		
II Полугодие – 36 часов				
	Геометрия. Стереометрия.	***20 ч***		
33-34	Метод координат при решении задач ЕГЭ блока «С».	2		
35-36	Уравнение плоскости. Решение задач ЕГЭ блока «С».	2		
37-38	Расстояние между прямыми и плоскостями. Решение задач блока «С».	2		
39-40	Расстояние от точки до прямой и до плоскости. Решение задач блока «С».	2		
41-42	Сечения многогранников. Решение задач блока «С».	2		
43-44	Угол между плоскостями. Решение задач блока «С».	2		
45-46	Угол между прямой и плоскостью. Решение задач блока «С».	2		
47-48	Угол между скрещивающимися прямыми. Решение задач блока «С».	2		
49-50	Объемы многогранников. Решение задач блока «С».	2		
51-52	Круглые тела: цилиндр, конус, шар. Решение задач блока «С».	2		
	Числа и их свойства.	***16ч***		
53-54	Числа и их свойства.	2		
55-56	Числовые наборы на карточках и досках.	2		
57-58	Последовательности и прогрессии.	2		
59-60	Сюжетные задачи: кино, театр, веревки, мотки…	2		
61-64	Решение задач блока «С» ЕГЭ	4		
65-68	Резерв.	4		

2.Содержание курса

Тема 1. Текстовые задачи. Теория многочленов (16ч)

Задачи на проценты, смеси и сплавы. Задачи на движение по прямой. Задачи на движение по окружности. Задачи на движение по воде. Задачи на движение на совместную работу. Теория многочленов. Теорема Безу. Применение теоремы Безу при решении уравнений и неравенств в заданиях ЕГЭ.

Тема 2. Геометрия. Планиметрия (16ч)

Решение прямоугольного и равнобедренного треугольников. Треугольники общего вида. Теоремы о медиане, биссектрисе треугольника. Формулы площади треугольника. Параллелограммы и трапеции. Четырехугольники.
Центральные и вписанные углы. Касательные, хорда,

секущая. Теорема об углах между касательной и хордой. Две теоремы об отрезках, связанных с окружностью. Углы с вершинами внутри и вне круга.
Вписанные и описанные окружности. Вписанный и описанный четырехугольник.
Многоугольники и их свойства. Окружности и системы окружностей. Окружности и многоугольники. Решение задач блока «С» ЕГЭ.

Тема 3. Линейные уравнения и неравенства с параметром (8 ч)

Знакомство с параметром. Линейное уравнение с одной переменной, содержащее параметр.
Линейные неравенства с параметром. Количество корней уравнений с параметром.
Параметр в системах линейных уравнений и неравенств.

Тема 4. Квадратные уравнения и неравенства с параметром (12ч)

Квадратичная функция в задачах с параметром. Количество корней квадратных уравнений с параметром. Расположение корней квадратичной функции относительно заданных точек. Параметр в квадратичных уравнениях и неравенствах. «Ботаника» квадратного трехчлена.

Тема 5. Финансовая математика (16ч)

Проценты, доли и соотношения. Просты и сложные проценты. Кредиты. Вклады. Производственные и бытовые задачи. Задачи на нахождение экстремумов. Решение задач блока «С» ЕГЭ.

Тема 6. Тригонометрия (16ч)

Вычисление значений тригонометрических выражений. Преобразований числовых и буквенных тригонометрических выражений.. Метод разложения на множители.
Метод введения новой переменной и использование основных формул тригонометрии. Метод исследования корней уравнения на ОДЗ. Решение уравнений смешанного типа блока «С» ЕГЭ.
Решение тригонометрических уравнений блока «С» ЕГЭ.

Тема 7. Неравенства (16ч)

Рациональные неравенства. Обобщенный метод интервалов. Показательные и логарифмические неравенства. Неравенства с логарифмами по переменному основанию. Метод рационализации при решении показательных и логарифмических неравенств. Решение неравенств блока «С» ЕГЭ.

Тема 8. Геометрия. Стереометрия (20ч)

Метод координат при решении задач ЕГЭ блока «С». Уравнение плоскости. Расстояние между прямыми и плоскостями. Расстояние от точки до прямой и до плоскости. Сечения многогранников. Угол между плоскостями. Угол между прямой и плоскостью. Угол между скрещивающимися прямыми. Объемы многогранников. Круглые тела: цилиндр, конус, шар. Решение задач блока «С» ЕГЭ.

Тема 9. Числа и их свойства (16 ч)
Числа и их свойства. Числовые наборы на карточках и досках. Последовательности и прогрессии. Сюжетные задачи: кино, театр, веревки, мотки… Решение задач блока «С» ЕГЭ.

Календарный учебный график

Продолжительность учебного года составляет 34 недели.
Продолжительность каникул в течение учебного года составляет не менее 30 календарных

дней, летом — не менее 8 недель.

10-11 классы (6-ти дневная учебная неделя)

Продолжительность четвертей:

	Начало	Окончание	Количество учебных недель
1 полугодие	01.09.2021	28.12.2021	16 недель
2 полугодие	10.01.2022	25.05.2022	18 недель
Год	01.09.2021	25.05.2022	34 недели

Сроки проведения промежуточной аттестации - апрель – май 2022 года

Каникулы:

	Начало	Окончание	Продолжительность
осенние	31.10.2021	07.11.2021	8 календарных дней
зимние	29.12.2021	09.01.2022	12 календарных дней
весенние	20.03.2022	29.03.2022	10 календарных дней
летние	26.05.2022	31.08.2022	98 календарных дней

Приложения.

Литература для учителя

- П. И. Горнштейн, В. Б. Полонский, М. С. Якир. Задачи с параметром. — М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 2005
- Власова А.П. Задачи с параметрами. Логарифмические и показательные уравнения, неравенства, системы уравнений. 10—11 кл.: учебное пособие — М. : Дрофа, 2005
- Домбровская Т.В. Задания с параметром: методическое пособие для учителей математики. — ТОИПКРО, 2002
- Ястребиненский Г.А. Уравнения и неравенства, содержащие параметры. Пособие для учителей. М., «Просвещение», 1972

Литература для ученика

- Скворцова М. Уравнения и неравенства с модулем. 10-11 классы\\ Математика №20, 2014 с.17
- Виленкин Н.Я. За страницами учебника математики М. Просвещение 2008, с.73
- Денищева Л.О., БойченкоЕ.М., Глазков Ю.А. Готовимся к ЕГЭ . Математика, М.Дрофа, 2019, 120с.
- Виленкин Н.Я., Виленкин Л.Н. Сурвилло Г.С. и др. Алгебра 10-11 класс: уч. пособие для классов с углубленным изучением математики. М. Прсвещение, 20015, 256с.
- КИМы государственой итоговой аттетстации (ГИА)

Оценочные материалы

(данные задания выполняются в классе под руководством учителя):

1. При каких a уравнение $x^2+2(a-2)x+a+3=0$ имеет:

1) хотя бы один положительный корень;
2) хотя бы один отрицательный корень;
3) один корень меньше 1, второй корень – больше 1;
4) корни уравнения меньше 1;
5) корни уравнения больше 1.

2. При каких a уравнение $x^4+(1-a)x^2+a^2-1=0$ имеет: 1) четыре разных решения; 2) три решения; 3) два решения?

3. Найдите значения параметра *a,* при котором минимальным положительным решением неравенства $\frac{ax-12}{x} \ge 9$ является число 5.

4. При каких значениях *a* уравнение $|x-3|+|7+x|=a$ имеет два решения?

1) составьте аналогичное задание так, чтобы в нем явно не было модулей;
2) составьте задание, в котором «больше» модулей;
3) составьте задание, в котором выражение зависит от *a*.

5. При каких значениях *a* уравнение $x^3-3x^2-a^2x+3a^2=0$ имеет два корня?
1) $a \in \{-3;0;3\}$; 2) $a \in [-3;3]$; 3) $a \in (-3;3)$; 4) $a \in (-\infty;-3] \cup [3;+\infty)$.

6. При каких значениях *a* уравнение $x^2+a|x|-a-1=0$ имеет четыре решения?

7. Сколько решений, в зависимости от *a,* имеет система уравнений $\begin{cases} ax+2y=3-a \\ 2x+2a=1 \end{cases}$?

8. При каких значениях *a* уравнение $x^3+ax^2+bx+1=0$, где *a* и *b* - целые числа, имеет только один отрицательный корень? Верно ли школьник выполнил задание, если привел такой ответ: $a \in (-1;3]$?

9. Решить уравнение $\sqrt{1-x^2}=a-x$.

10. Решить уравнение $\sqrt{x-a}=\sqrt{2x-1+a}$.

Ниже приводится система тренировочных упражнений по решению и исследованию квадратных уравнений и неравенств с одним параметром. Данные упражнения могут использоваться в качестве индивидуальных заданий, заданий для работы в группах, а также для домашних работ.

Квадратные уравнения с параметром

1. При каких значениях a уравнение $ax^2-x+3=0$ ***имеет единственное решение?***

Решение.

Ошибочно считать данное уравнение квадратным. На самом деле это уравнение степени не выше второй. Исходя из этого соображения, рассмотрим следующие случаи:

а) a=0. При этом уравнение принимает вид $-x+3=0$, откуда $x=3$, т.е. решение единственно.

б) $a \ne 0$, тогда $ax^2-x+3=0$ – квадратное уравнение, дискриминант $D=1-12a$. Для того, чтобы уравнение имело единственное решение, нужно, чтобы $D=0$, откуда $a=\frac{1}{12}$.

Ответ: a=0 или $a=\frac{1}{12}$.

2. При каких значениях a уравнение $(a-2)x^2+(4-2a)x+3+0$ ***имеет единственное решение?***

Решение.

При a=2 исходное уравнение не имеет решения. При $a \ne 2$ данное уравнение является квадратным и принимает вид $x^2-2x+\frac{3}{a-2}=0$. Искомые значения параметра – это корни дискриминанта, который обращается в нуль при a=5.

Ответ: a=5.

3. При каких значениях a уравнение $ax^2-4x+a+3=0$ ***имеет более одного корня?***

Решение.

При a=0 уравнение имеет единственный корень $x=\frac{3}{4}$. При $a \ne 0$ исходное уравнение, будучи квадратным, имеет два корня, если его дискриминант положителен, т.е. $16-4a^2-12a>0$. Решая неравенство, получаем $-4<a<1$. Из этого промежутка следует исключить число нуль.

Ответ: $-4 < a < 1$ или $0 < a < 1$.

4. ***При каких значениях а уравнения*** $x^2 - a = 0$ ***и*** $\sqrt{x} - a = 0$ ***равносильны?***

Решение.

1) При a>0: $x^2 - a = 0$ имеет два различных корня, $\sqrt{x} - a = 0$ имеет один корень. Равносильности нет.

2) При a=0 решения уравнений совпадают.

3) При a<0 ни первое, ни второе уравнения решений не имеют. Как известно, такие уравнения считаются равносильными.

Ответ: $a \le 0$.

5. При каких значениях b уравнения $x^2 + (b^2 + 3b + 2)x = 0$ и $x^2 - 2(b+2)x + 5b + 6 = 0$ равносильны?

6. При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{x+a}{x+1} + \dfrac{a-3x}{x-3} = 2$ имеет одно решение?

7. При каких значениях m ровно один из корней уравнения равен нулю?

а) $3x^2 + x + 2m - 3 = 0$	в) $2x^2 - mx + 2m^2 - 3m = 0$
б) $x^2 - 2x + m^2 - 1 = 0$	г) $x^2 + (m+3)x + \lvert m \rvert - 3 = 0$

8. При каких значениях m корни уравнения равны по модулю, но противоположны по знаку:

а) $x^2 + (3m - 5)x - 2 = 0$	в) $3x^2 + (m^2 - 4m)x + m - 1 = 0$
б) $2x^2 - (5m - 3)x + 1 = 0$	г) $4x^2 + (5\lvert m \rvert - 1)x + 3m^2 + m = 0$

9. При каких значениях m оба корня уравнения равны нулю?

а) $3x^2 + (m-1)x + 1 - m^2 = 0$; б) $2x^2 + (3m^2 - \lvert m \rvert)x - m^3 - 3m = 0$

10. Решите уравнения:

I.

а) $x^2 + 5ax + 4a^2 = 0$	в) $x^2 - bx - 2b^2 = 0$
б) $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$	г) $x^2 + 5bx - 6b^2 = 0$

II.

а) $x^2 - (2a - 4)x - 8a = 0$	в) $x^2 - (3a - 2)x + 2a^2 - a - 3 = 0$
б) $x^2 + (3b - 2)x - 6b = 0$	г) $x^2 - 4bx + 3b^2 - 4b - 4 = 0$

III.

а) $ax^2-(a+1)x+1=0$	в) $abx^2+(a^2+b^2)x+ab=0$
б) $(a+1)x^2-2x+1-a=0$	г) $abx^2+(a^2-b^2)x+(a-b)^2=0$.

IV.

а) $\dfrac{x^2+(3-a)x-3a}{x^2-x-12}=0$	в) $\dfrac{x^2-(3b-1)x+2b^2-2b}{x^2-7x+6}=0$
б) $\dfrac{x^2-(a+1)x+2a-2}{3x^2-7x+2}=0$	г) $\dfrac{x^2+(1-4b)x+3b^2-b}{2x^2+3x-5}=0$.

V.

а) $x^4-(a^2+9)x^2+9a^2=0$	в) $4x^4-(b+36)x^2+9b=0$
б) $x^4-(9a^2+4)x^2+36a^2=0$	г) $9x^4-(b-18)x^2-2b=0$

11. При каких значениях k произведение корней квадратного уравнения $x^2+3x+(k^2-7k+12)=0$ равно нулю?

12. При каких значениях k сумма корней квадратного уравнения $x^2+(k^2+4k-5)x-k=0$ равна нулю?

13. В уравнении $x^2-4x+a=0$ сумма квадратов корней равна 16. Найти a.

14. В уравнении $x^2-2x+a=0$ квадрат разности корней равен 16. Найти a.

15. При каких значениях a сумма корней уравнения $x^2-2a(x-1)-1=0$ равна сумме квадратов корней?

16. При каком значении параметра m сумма квадратов корней уравнения $x^2+(2-m)x-m-3=0$ наименьшая?

17. При каком значении параметра m сумма квадратов корней уравнения $x^2+(m-1)x+m^2-1{,}5=0$ наибольшая?

18. При каких значениях параметра a один из корней квадратного уравнения $(a^2-5a+3)x^2+(3a-1)x+2=0$ в два раза больше другого?

19. Известно, что корни уравнения $x^2-5x+4=0$ на 1 меньше корней уравнения / $x^2-7x+3a-6=0$. Найдите a и корни каждого из уравнений.

Неравенства с параметром

1. Решите неравенство, где a – параметр:

а) $5x-a>ax-3$	в) $a(3-x)\ge 3x+a$
б) $a(2x-1)<ax+5$	г) $3(2a+x)<1-ax$.

2. Найдите все значения a, при которых квадратное уравнение имеет два действительных различных корня:

а) $3x^2-2x+a=0$	в) $(2a-1)x^2+2x-1=0$
б) $ax^2-3x-1=0$	г) $ax^2-(2a-1)x+a+2=0$.

3. Найдите все значения *a*, при которых квадратное уравнение не имеет действительных корней:

а) $x^2 - 4x + a = 0$	в) $(1\text{-}a)x^2 + 4x - 3 = 0$
б) $5x^2 - 6ax - 1 = 0$	г) $(3a - 5)x^2 - (6a - 2)x + 3a - 2 = 0$.

4. При каких значениях *a* уравнение $2x + 3 = 2a + 3x$ имеет положительное решение?

5. При каких значениях *a* уравнение $1 + 3x - ax = 2 + x$ имеет отрицательное решение?

6. При каких значениях *a* уравнение $a(3x - a) = 6x - 4$ имеет одно положительное решение?

7. При каких значениях *a* уравнение $a(x-1) = x - 2$ имеет решения, удовлетворяющее условию $x > 1$?

8. При каких значениях *a* система неравенств имеет хотя бы одно решение:

а) $\begin{cases} x < 3 \\ x > a \end{cases}$	б) $\begin{cases} x \le 5 \\ x > a \end{cases}$
в) $\begin{cases} x \le 7 \\ x \ge a \end{cases}$	г) $\begin{cases} x \le a \\ x \ge 2 \end{cases}$

9. При каких значениях *a* система неравенств не имеет решений:

а) $\begin{cases} x < 4 \\ x > a \end{cases}$	б) $\begin{cases} x \le 2 \\ x > a \end{cases}$
в) $\begin{cases} x \le 5 \\ x \ge a \end{cases}$	г) $\begin{cases} x \le a \\ x > 2 \end{cases}$

10. При каких значениях *a* система неравенств имеет хотя бы одно решение?

$$\begin{cases} 3(a - 5x) < 1 + x \\ 2 - \dfrac{x}{2} > 3 + 5(x - a) \end{cases}$$

11. При каких значениях *a* уравнение $x^2 - (2a - 6)x + 3a + 9 = 0$ имеет корни разных знаков?

12. При каких значениях *a* уравнение $x^2 - (a-2)x - 2 - 3a = 0$ имеет корни x_1 и x_2 такие, что $x_1 < 0,\ x_2 > 0,\ |x_1| > x_2$?

13. Найдите все значения *a*, при которых корни уравнения $x^2 + (a+1)x - 2a(a-1) = 0$ меньше, чем 1.

14. Найдите все значения *a*, при которых один из корней уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$ меньше 1, а другой больше 1.

15. При каких значениях *a* система уравнений

$$\begin{cases} x + y = a \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

имеет решение $x < 0, \quad y > 0$?

16. При каких значениях *a* система уравнений

$$\begin{cases} 3x - y = 1 - a \\ x + y = 2a + 1 \end{cases}$$

имеет решение $x \ge 1, \quad y \le 4$?

17. Для каждого *a* решите неравенство:

I.

а) $x^2 - ax < 0$	в) $ax - 3x^2 < 0$
б) $(x-3)(x-a) \le 0$	г) $x^2 - (a+1)x + a \ge 0$

II.

а) $\frac{x}{a} < 3x - 1$	в) $\frac{x-3}{a+1} < \frac{x-2}{a-3}$
б) $\frac{3x-1}{a-2} > 0$	г) $\frac{x-2}{a-3} > \frac{1-2x}{a}$

III.

а) $(x-3)^2 < a$	в) $(3-4x)^2 \le a - 1$
б) $(5x+3)^2 > a$	г) $(2-x)^2 \ge 3 - a$

IV.

а) $\lvert x-a \rvert (x-3) < 0$	в) $(x-a)^2(x-7) \ge 0$
б) $(x-a)\lvert x-5 \rvert \le 0$	г) $(x-a)(2x+3)^2 > 0$

Глава 2. Аналитическое решение основных типов задач.

Необходимые умения

(данные задания выполняются в классе под руководством учителя):

1. При каких а область определения функции
2. $y=\sqrt{3a-2-a^2+x(3-2a)-x^2}-\sqrt{x^2-x-6}$ состоит из одного числа?
3. Решить уравнение $\sqrt{1+x^2}=1-a^2$.
4. Решить неравенство $\sqrt{2ax-x^2}\ge a-x$.
5. Решить двумя способами уравнение $\sqrt{2x^2+4x+a}=x^2+3x+a$.
6. Решить неравенство $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-6}\ge a$.
7. Найдите все значения параметра а, при которых неравенство $x^2+2|x-a|\ge a^2$ выполняется при всех x.
8. Найдите все значения p, для которых уравнение 9-4cosx=p(1+tg2x) имеет хотя бы один корень.
9. Из области определения функции $y=\dfrac{1}{\sqrt{a^a-a^{\frac{6x+1}{x+1}}}}$ взяли все целые положительные числа и сложили их. Найдите все положительные значения а, при которых такая сумма будет больше 4, но меньше 7.
10. Определите, при каких значениях параметра а, уравнение $\left(a^2-9\right)\cos x=a+3$ имеет решения.

Решение:

1) Если $a=3$, то данное уравнение имеет вид: $0\cdot\cos x=6$, и не имеет решений.

2) Если $a=-3$, то получаем: $0\cdot\cos x=0$, т. е. решением уравнения является любое действительное число.

3) если $a\ne\pm3$, то: $\cos x=\dfrac{a+3}{(a-3)(a+3)}=\dfrac{1}{a-3}$.

Теперь достаточно решить неравенство:

$$\left|\frac{1}{a-3}\right|\le1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{1}{a-3}\ge0,\\ \dfrac{1}{a-3}\le1;\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{1}{a-3}<0,\\ -\dfrac{1}{a-3}\le1;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>3,\\ \dfrac{a-4}{a-3}\ge0;\end{cases}\\ \begin{cases}a<3,\\ \dfrac{a-2}{a-3}\ge0;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>3,\\ \left[\begin{array}{l}a\le3;\\ a\ge4;\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}a<3,\\ \left[\begin{array}{l}a\le2;\\ a\ge3;\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a\le2;\\ a\ge4.\end{array}\right.$$

Ответ: при $a\in(-\infty;2]\cup[4;+\infty)$.

11. Определите, при каких значениях параметра а, уравнение $\cos^2x-(a+7)\cos x+(4-a)(2a+3)=0$ имеет решения.

Решение:

Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно $\cos x$.

$D=(a+7)^2-4(4-a)(2a+3)=(3a-1)^2$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{(a+7)+(3a-1)}{2};\\ \cos x=\dfrac{(a+7)-(3a-1)}{2};\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=2a+3;\\ \cos x=-a+4.\end{array}\right.$$

Таким образом, искомое значение параметра a – это решения совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}|2a+3|\le 1;\\ |-a+4|\le 1;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\le 2a+3\le 1;\\ -1\le -a+4\le 1;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2\le a\le -1;\\ 3\le a\le 5.\end{array}\right.$$

Ответ: при $a\in[-2;-1]\cup[3;5]$

12. Определите, при каких значениях параметра a, уравнение $\dfrac{\cos x-a}{\sqrt{\cos x-3a+1}}=0$ имеет решения.

Решение:

Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\cos x=a,\\ \cos x>3a-1.\end{cases}$$

Таким образом, наличие решений обеспечит следующая система:

$$\begin{cases}|a|\le 1,\\ a>3a-1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le a\le 1,\\ a<\dfrac{1}{2};\end{cases}\Rightarrow\left(-1\le a<\dfrac{1}{2}\right).$$

Ответ: при $a\in\left[-1;\dfrac{1}{2}\right)$.

13. Определите, при каких значениях параметра a, уравнение $\dfrac{\arccos x-a}{\arcsin x+\dfrac{\pi}{6}}=0$ имеет решения.

Решение:

Переходим к системе, равносильной данному уравнению:

$$\begin{cases}\arccos x=a,\\ \arcsin x\ne -\dfrac{\pi}{6};\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le a\le\pi,\\ x\ne -\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Так как $x\ne -\dfrac{1}{2}$, то из равенства $\arccos x=a$ следует, что $a\ne\dfrac{2\pi}{3}$.

Ответ: при $a\in\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right)\cup\left(\dfrac{2\pi}{3};\pi\right]$.

14. Определите, при каких значениях параметра a, уравнение $(2a^2+10a+13)\sin^2 x+2(a+2)\sin x+1=0$ имеет решения.

Решение:

Так как $2a^2+10a+13>0$, то можем рассматривать данное уравнение как квадратное относительно $\sin x$.

Имеем: $D/4=(a+2)^2-(2a^2+10a+13)=-(a+3)^2$.

$\dfrac{D}{4}\le 0$, значит, если данное уравнение имеет решения, то только при $a=-3$.

Тогда получаем:

$\sin^2 x-2\sin x+1=0$

$(\sin x-1)^2=0$

$\sin x=1$

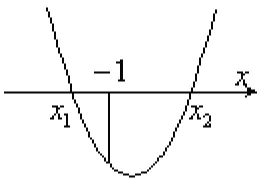
$x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$

Ответ: уравнение имеет решения при $a=-3$.

15. При каких значениях параметра а, число –1 лежит между корнями уравнения $x^2+2(a+1)x+4a+4=0$?

Решение:

Пусть $f(x)=x^2+2(a+1)\,x+4a+4$.



Старший коэффициент квадратного трехчлена больше нуля, значит, чтобы заданное число –1 лежало между корнями уравнения необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$f(-1)<0$. Ограничения на дискриминант накладывать не нужно, т.к. если одно из значений квадратичной функции меньше нуля, а ветви параболы направлены вверх, то функция обязательно будет иметь два нуля.

Итак, $f(-1)=1+2(a+1)\cdot(-1)+4a+4=2a+3$.

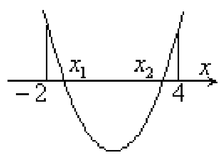
$2a+3<0,\ a<-1{,}5$.

Ответ: при $a<-1{,}5$.

16. Найдите все значения параметра а, при которых оба корня уравнения $x^2-2ax+a^2-1=0$ удовлетворяют неравенству $-2<x<4$.

Решение:

Пусть $f(x)=x^2-2ax+a^2-1$.



Старший коэффициент квадратного трехчлена больше нуля, значит, чтобы оба корня уравнения удовлетворяли данному неравенству, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{cases} f(-2)>0,\\ f(4)>0,\\ D/4\ge 0,\\ -2<x_0<4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4+4a+a^2-1>0,\\ 16-8a+a^2-1>0,\\ a^2-a^2+1\ge 0,\\ -2<a<4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+4a+3>0,\\ a^2-8a+15>0,\\ -2<a<4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a<-3;\\ a>-1; \end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l} a<3;\\ a>5; \end{array}\right.\\ -2<a<4; \end{cases} \Rightarrow (-1<a<3).$$

Ответ: при $-1<a<3$.

17. При каком значении параметра a, система уравнений:

$$\begin{cases}(a^2+2)x+(2a+1)y=a^2+a+1,\\(2a-1)x+y=2a^3-1.\end{cases}$$

а) имеет единственное решение; б) не имеет решений;
в) имеет бесчисленное множество решений?

Решение:

а) Система линейных уравнений имеет единственное решение, если:

$$\frac{a^2+2}{2a-1}\neq\frac{2a+1}{1}$$

$$a^2+2\neq4a^2-1$$

$$\begin{cases}a\neq1,\\a\neq-1.\end{cases}$$

б) Система линейных уравнений не имеет решений, если:

$$\frac{a^2+2}{2a-1}=\frac{2a+1}{1}\neq\frac{a^2+a+1}{2a^3-1}$$

$$\frac{a^2+2}{2a-1}=\frac{2a+1}{1}\ \text{при}\ \left[\begin{array}{l}a=1;\\a=-1.\end{array}\right.$$

Но $\dfrac{2a+1}{1}\neq\dfrac{a^2+a+1}{2a^3-1}$

$$4a^4+2a^3-a^2-3a-2\neq0$$

Легко заметить, что $a=1$ корень многочлена $4a^4+2a^3-a^2-3a-2.$

После деления его на двучлен $a-1$, получим:

$$(a-1)(4a^3+6a^2+5a+2)\neq0$$

Очевидно, что $a\neq1$

в) Бесконечно много решений система линейных уравнений будет иметь, если:

$$\frac{a^2+2}{2a-1}=\frac{2a+1}{1}=\frac{a^2+a+1}{2a^3-1}$$

Данное условие выполняется при $a=1$.

Ответ: система имеет единственное решение, если $a\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$ бесчисленное множество решений при $a=1$, не имеет решений при $a=-1$.

18. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых неравенство выполняется для любых чисел x и y таких, что

$$|x|=|y|;\quad 9x^2-x+\frac{1}{36}\geq y-9y^2+axy.$$

Решение:

Для того, чтобы данное неравенство выполнялось для всех x и y, удовлетворяющих данному равенству, нужно, чтобы оно выполнялось и для всех $x=y$ и для всех $x=-y$.

1) Если $x=y$, то данное неравенство принимает вид:

$$9x^2-x+\frac{1}{36}\ge x-9x^2+ax^2$$

$$(18-a)x^2-2x+\frac{1}{36}\ge 0$$

Это неравенство верно при любых x, если:

$$\begin{cases}18-a>0,\\ D/4\le 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a<18,\\ 1-\frac{1}{36}(18-a)\le 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a<18,\\ a\le -18;\end{cases}\Rightarrow(a\le -18).$$

2) Если $x=-y$, то данное неравенство принимает вид:

$$9x^2-x+\frac{1}{36}\ge -x-9x^2-ax^2$$

$$(18+a)x^2+\frac{1}{36}\ge 0$$

Это неравенство должно выполняться для всех x, следовательно:

$18+a\ge 0$, т.е. $a\ge -18$

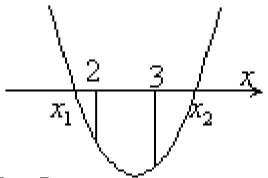
Итак, только при $a=-18$ данное неравенство выполняется и для всех $x=y$ и для всех $x=-y$.

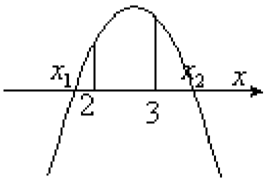
Ответ: при $a=-18$.

19. Пусть квадратное уравнение (а – 2)х^2 – 2(а + 3)х + 4а = 0 имеет корни х 1 и х2. Найдите все такие а, что х1 и х2 удовлетворяют неравенству: х1 < 2 < 3 < х 2.

Решение:

Пусть $f(x)=(a-2)x^2-2(a+3)x+4a$





Чтобы корни квадратного уравнения удовлетворяли данному неравенству, нужно, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{cases}a-2>0,\\ f(2)<0,\\ f(3)<0.\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}a-2<0,\\ f(2)>0,\\ f(3)>0.\end{cases}$$

$$1)\ \begin{cases}a-2>0,\\ f(2)<0,\\ f(3)<0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>2,\\ 4a-20<0,\\ 7a-36<0.\end{cases}\Leftrightarrow(2<a<5);$$

$$2)\ \begin{cases}a-2<0,\\ f(2)>0,\\ f(3)>0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a<2,\\ a>5,\\ a>\frac{36}{7}.\end{cases}\Rightarrow(a\in\varnothing).$$

Ответ: $2<a<5$.

Тренировочные упражнения

выполняются индивидуально или в группах:

1. Решать уравнения вида:

1) $\frac{a-1}{2ax+3}=5$;

2) $\sqrt{x-a}=\sqrt{2x-1+a}$;

3) $\sqrt{1-x^2}=x-a$;

4) $||x-2|-4|=a$;

5) $x^2+2ax+1=0$.

6. Решать неравенства:

1) $\sqrt{ax}\ge x+1$;

2) $\log_a(7-x)>2\log_a(x-1)$;

3) $2^a<4^{\frac{7x+1}{x+1}}$;

4) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-6}<a$;

5) $x^2+2|x-a|\ge a^2$.

7. При каких значениях a уравнение $\sqrt{\pi x-x^2}\left((a-2)\sin x-a\right)=0$ имеет четыре корня?

8. Чему равна сумма возможных значений параметра a, при которых уравнение $\arcsin(\sin x)=a\pi+\frac{\pi}{4}$ имеет три корня в промежутке $\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{7\pi}{2}\right]$?

9. Найдите все значения параметра, при которых неравенство $a(2+\sin^2 x)^4+\cos^2 x+a>11$ выполняется для всех x.

10. Найдите все значения параметра, при которых система уравнений $\begin{cases}\log_2(3x+y)-2=\log_2 x\\ 4x^2-3+a=4ya-a^2\end{cases}$ имеет два решения.

11. Решить уравнение $x^2+7x+a=\sqrt{2x^2+6x+a}$.

12. Найдите все значения параметра, при которых число корней уравнения $|x^2-7|x|+6|=a$ равно a.

13. При каких а уравнение $\sin^2 x-12\sin x\cdot\cos x+3\cos^2 x=a$ имеет решения. Может ли a принимать отрицательное значение?

14. Найдите все значения параметра, при которых уравнение $\sqrt{\sin^4 x+4\cos^2 x}+\sqrt{\cos^4 x+4\sin^2 x}=a$ имеет решения.

15. При каком значении параметра c уравнение

$\log_{0,5}\left(\sin^2\left(\frac{9\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)\right)=c+\frac{1}{2}$ имеет решение. Найдите эти решения.

16. Найдите все значения параметра b, при которых область определения функции $y=\log_7\left(\left(\sqrt{b}\right)^{2x+10}+\left(x^2\sqrt{x}\right)^2\cdot b^4-x^{5+x\log_x b}-\left(b^3\right)^{\log_2 8}\right)$ содержит ровно три натуральных числа?

17. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $9-4\cos x=p(1+tg^2 x)$ имеет хотя бы один корень.

Творческие задания

выполняются по желанию обучающихся

1. Подготовить сообщения:
   а) Параметр в квадратных неравенствах;
   б) Типичные ошибки при решении задач с параметром, их объяснение и предупреждение;
2. Подготовить материалы: о задачах с параметром на английском языке; электронный задачник с задачами с параметром, составленный учениками (с указаниями и ответами).
3. Подготовить сообщения на тему «Задания с параметром и квадратичной функцией в ЕГЭ».
4. Отследить задачи с параметром в интернете. Подготовить обучающую программу на основе этих материалов.
5. Изучить свойство корней кубического четырехчленна.

Рейтинговая контрольная работа по теме «Знакомство с параметром»

1. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $ax^2+(a+1)x+1=0$ имеет единственное решение.
2. Для каждого значения a указать число корней уравнения $|x^2-3|x|+2|=a$.
3. Решить неравенство $x^2+2x+a>0$.
4. При каких a система уравнений $\begin{cases} ax+4y=3, \\ x+ay=1-a \end{cases}$ не имеет решений.
5. При каких a корни уравнения $x^2+ax+2a^2=0$ больше 1.
6. Существует ли такое a, при которых уравнение $x^2+a|x|-a-1=0$ имеет четыре решения?
7. При каких a уравнение $|x-1|+|x+3|=a$ имеет два решения?
8. Решить уравнение: $a|x+3|+2|x+4|=2$.
9. Уравнение $(a-1)x^2 - (a+1)x+2a+1=0$ имеет корни x_1, x_2. Найти все значения a, при которых корни меньше 1.
10. При каких значениях параметра a сумма S квадратов корней уравнения $x^2+2ax+2a^2+4a+3=0$ является наибольшей? Найти эту сумму.

Глава 3. Графический способ решения задач с параметром

Необходимые умения

(данные задания выполняются в классе под руководством учителя):

1. Решите уравнение $|x+2| = ax.$ в зависимости от значений параметра ***a***:

Решение:

Считаем, что $x \neq 0$, заметив предварительно, что $x = 0$ не является корнем уравнения ни при каком конечном значении парметра a. Разделим обе части уравнения на x.

$$a = \frac{|x+2|}{x}, \quad a = \begin{cases} 1 + \dfrac{2}{x}, \text{ если } x \geq -2; \\ -1 - \dfrac{2}{x}, \text{ если } x < -2. \end{cases}$$

Количество решений исходного уравнения зависит от количества точек пересечения построенной линии и прямой $y = a$

Итак, при $a \in (-\infty; -1] \cup \{0\} \cup (1; +\infty)$ $\quad \dfrac{x+2}{x} = a,$ откуда $\quad x = \dfrac{2}{a-1};$

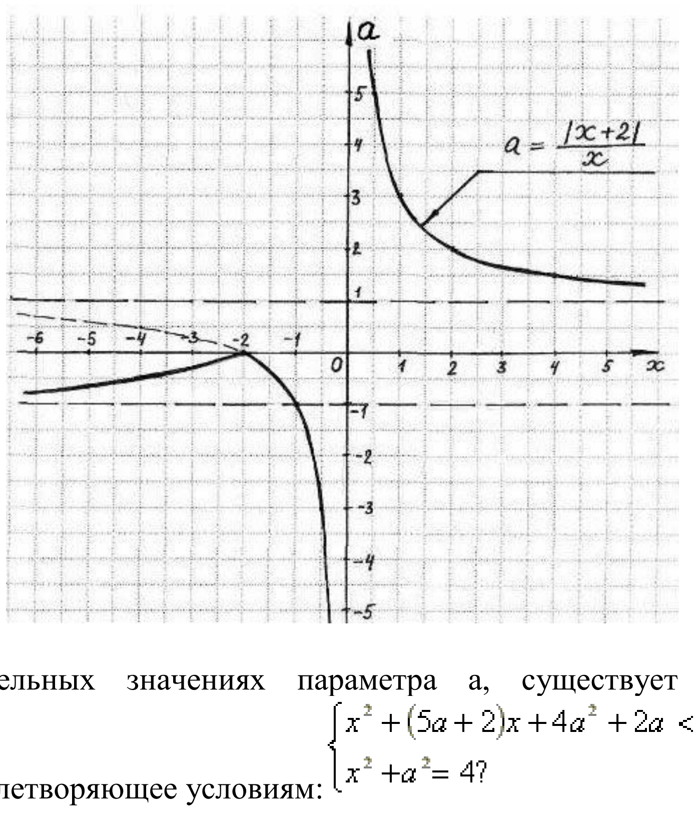
при $a \in (-1; 0)$ $\quad \dfrac{x+2}{x} = a$ или $-\dfrac{x+2}{x} = a,$ т.е. $x = \dfrac{2}{a-1}$ или $x = -\dfrac{2}{a+1};$

при $a \in (0; 1]$ уравнение не имеет решений.

Ответ: при $a \in (-\infty; -1] \cup \{0\} \cup (1; +\infty)$ $\quad x = \dfrac{2}{a-1};$

при $a \in (-1; 0)$ $x = \dfrac{2}{a-1}$ или $x = -\dfrac{2}{a+1};$

при $a \in (0; 1]$ уравнение не имеет решений.



2. При каких действительных значениях параметра a, существует хотя бы одно действительное x, удовлетворяющее условиям: $\begin{cases} x^2 + (5a+2)x + 4a^2 + 2a < 0, \\ x^2 + a^2 = 4? \end{cases}$

Решение:

Рассмотрим квадратный трехчлен $x^2+(5a+2)x+4a^2+2a$.

$D=25a^2+20a+4-16a^2-8a=(3a+2)^2$.

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-5a-2+3a+2}{2}; \\ x=\dfrac{-5a-2-3a-2}{2}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-a; \\ x=-4a-2. \end{array}\right.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} x^2+(5a+2)x+4a^2+2a<0, \\ x^2+a^2=4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+a)(x+4a+2)<0, \\ x^2+a^2=4; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+a<0; \\ x+4a+2>0, \end{array}\right. \\ x^2+a^2=4; \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+a>0; \\ x+4a+2<0, \end{array}\right. \\ x^2+a^2=4; \end{cases} \end{array}\right.$$

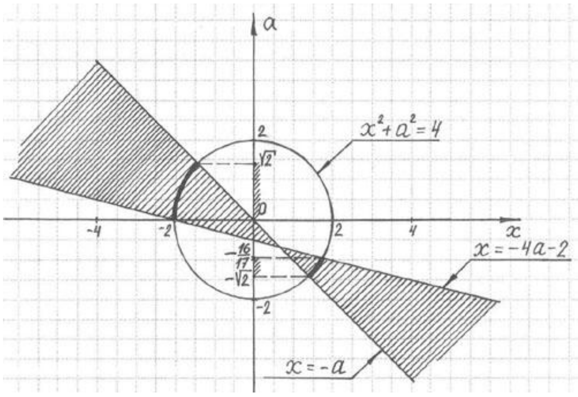
Обозначим ось ординат a, ось абсцисс – x и построим в этой системе координат множество точек, координаты которых (x, a) удовлетворяют данным условиям.

Найдем ординаты точек пересечения построенных прямых с окружностью:

$$1)\ \begin{cases} x=-a, \\ x^2+a^2=4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2=4, \\ x=-a; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=\sqrt{2}, \\ x=-\sqrt{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} a=-\sqrt{2}, \\ x=\sqrt{2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$2)\ \begin{cases} x=-4a-2, \\ x^2+a^2=4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-4a-2)^2+a^2=4, \\ x=-4a-2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(17a+16)=0, \\ x=-4a-2; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0, \\ x=-2; \end{cases} \\ \begin{cases} a=-\dfrac{16}{17}, \\ x=-\dfrac{98}{17}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: при $a\in\left(-\sqrt{2};-\dfrac{16}{17}\right)\cup\left(0;\sqrt{2}\right)$



3. Решите уравнение $ax+2=|x+3|$ в зависимости от значений параметра а:

Решение:

Поскольку $x = 0$ не корень уравнения, то можно разрешить уравнение относительно a

$$a = \frac{|x+3| - 2}{x}, \quad a = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{x}, \text{ если } x \geq -3; \\ -1 - \dfrac{5}{x}, \text{ если } x < -3. \end{cases}$$

Количество решений исходного уравнения зависит от количества точек пересечения построенной линии и прямой $y = a$.

При $x = -3$: $a = \dfrac{2}{3}$.

Таким образом, если $a \in (-\infty; -1] \cup \left\{\dfrac{2}{3}\right\} \cup (1; +\infty)$, то $\dfrac{x+1}{x} = a$, откуда $x = \dfrac{1}{a-1}$;

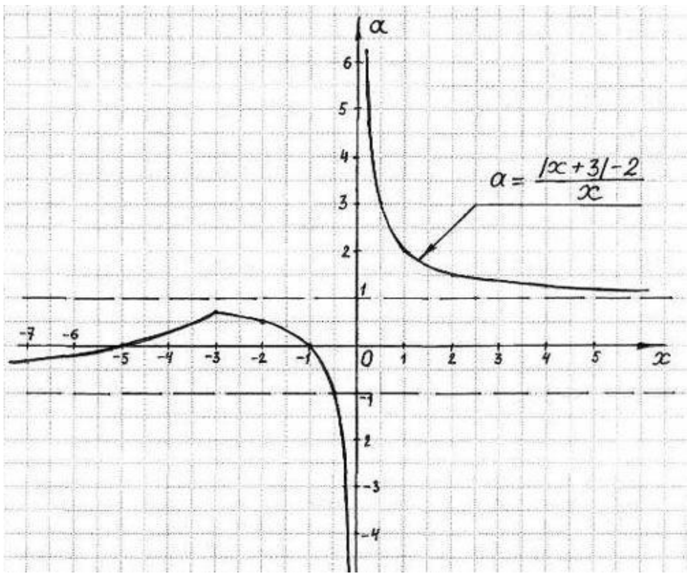
если, $a \in \left(-1; \dfrac{2}{3}\right)$, то $\dfrac{x+1}{x} = a$ или $-\dfrac{x+5}{x} = a$, т.е. $x = \dfrac{1}{a-1}$ или $x = -\dfrac{5}{a+1}$;

если, $a \in \left(\dfrac{2}{3}; 1\right]$, то уравнение не имеет решений.

Ответ: если $a \in (-\infty; -1] \cup \left\{\dfrac{2}{3}\right\} \cup (1; +\infty)$, то $x = \dfrac{1}{a-1}$;

если, $a \in \left(-1; \dfrac{2}{3}\right)$, то $x = \dfrac{1}{a-1}$ или $x = -\dfrac{5}{a+1}$;

если, $a \in \left(\dfrac{2}{3}; 1\right]$, то уравнение не имеет решений.



4. Найдите все числа p, при которых существует единственное число x, удовлетворяющее условиям: $\begin{cases} \sin \pi x = 0, \\ (2x + 14p^2 - 7)(4x - 4p^2 - 15) \leq 0. \end{cases}$

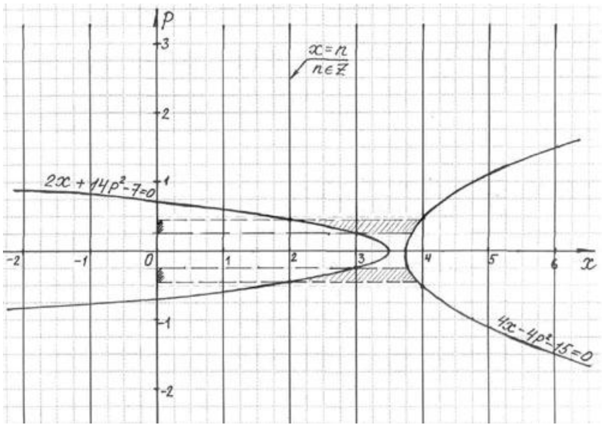
Решение:

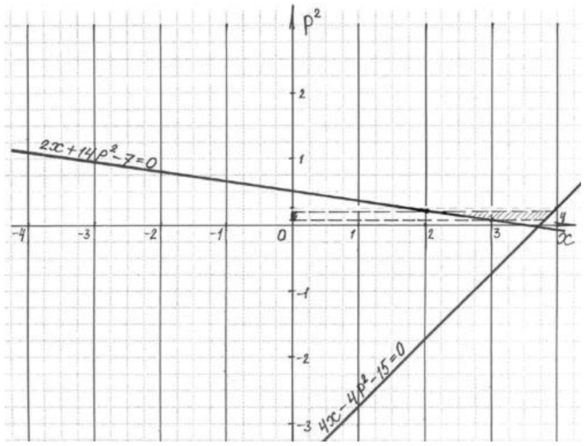
$$\begin{cases} \sin \pi x = 0, \\ (2x+14p^2-7)(4x-4p^2-15) \le 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = n, \ n \in Z, \\ (2x+14p^2-7)(4x-4p^2-15) \le 0. \end{cases}$$

Решим систему графически. Штриховкой на координатной плоскости $(x; p)$ изображено множество точек, координаты которых удовлетворяют условиям системы

Для упрощения построения графиков это множество можно изобразить в системе координат $(x; p^2)$.

Ответ: $-\dfrac{\sqrt{42}}{14} < p \le -\dfrac{\sqrt{14}}{14}$ или $\dfrac{\sqrt{14}}{14} \le p < \dfrac{\sqrt{42}}{14}$.





5. Найдите все действительные значения a, для каждого из которых уравнение $\sqrt{x-a}\left(x^2+\left(1+2a^2\right)x+2a^2\right)=0$ имеет только два различных корня, найдите их.

Решение:

Разложим на множители квадратный трехчлен $x^2+(1+2a^2)x+2a^2$

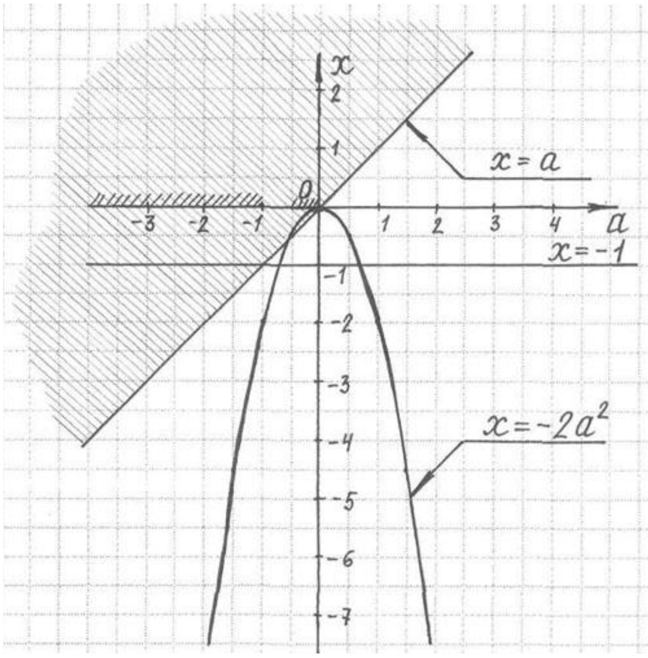
$D = 1+4a^2+4a^4-8a^2 = 4a^4-4a^2+1 = (2a^2-1)^2$.

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1-2a^2+2a^2-1}{2}; \\ x = \dfrac{-1-2a^2-2a^2+1}{2}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1; \\ x=-2a^2. \end{array}\right.$$

$$\sqrt{x-a}(x+1)(x+2a^2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-a}=0; \\ x+1=0; \\ x+2a^2=0; \end{array}\right. \\ x \ge a. \end{cases}$$

Обозначим ось ординат x, ось абсцисс $-a$ и построим в этой системе координат множество точек, координаты которых (x, a) удовлетворяют данным условиям.

Ответ: при $a \in \left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)$ $x=a$ или $x=-2a^2$; при $a \in (-\infty; -1)$ $x=a$ или $x=-1$.


x
a
O
x = a
x = −1
x = −2a^2
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−3
−2
−1
1
2
3
4

Глава 4. Применение производной в задачах с параметром.

Часть 1. Решение задач по группам.

Задачи 1 группы:

1. При каких значениях функция возрастает по всей числовой оси $F(x)= 2e^{x}-ae^{-x}+(2a+1)x–3$?
2. При каких значениях а точки экстремума функции $F(x)=x^3–3ax^2+3(a^2–1)x-1$ лежат на отрезке (–2;4)
3. При каких значениях а стационарные точки функции $F(x)= {}^1/3x^3–ax^2+(a+2)x$ меньше 1?

Задачи 2 группы:

1. При каких значениях а функция $F(x)=x^3+3(a–7)x^2+3(a^2–9)x–1$ имеет положительную точку максимума?
2. Найти все значения t такие, что функция $y=2x^3–3x^2+7$ возрастает в интервале (t–1; t +1)
3. При каких значениях а точка $x_o=a$ является точкой минимума функции $y=2x^3–3(a+1)x^2+6ax–1$?

Задачи 3 группы:

1. При каких значениях а уравнение x+1=x+a имеет решение?
2. При каких значениях 2 хорда параболы $y=a^2x^2+5ax–4$, касающаяся кривой y=1/1–x в точке с абсциссой $x_0=2$ делится этой точкой пополам?

Часть 2. Программированный контроль.

1. При каких значениях а функция $y=(a+2)x^3–2ax^2+9ax–1$ убывает на всей числовой оси?

Ответ:

1. а меньше –2, а больше 0
2. а меньше –3
3. а меньше –3, а больше 0

2. Для каких а число 1 лежит между стационарными точками функции $F(x)=1/3x^3–ax^2+(2a^2–4a+3)x$?

Ответ:

1. а больше 1, но меньше 2
2. а больше 1, но меньше 3
3. а меньше 2

3. При каких m значение экстремумов функции $F(x)={}^2/3x^3–(2{,}5m–1{,}5)x^2+x+1$ равны по модулю, но противоположны по знаку?

Ответы:

1. x=3/5
2. x=1/2
3. таких m нет

4. Найдите все значения р такие, что функция $y=-x^3+3x+5$ убывает в интервале (p;p+ 1/2)

Ответ:

1. р больше или равно 1
2. р меньше или равно –1,5 или р больше или равно 1
3. р меньше или равно –1,5